Partie de pêche

A. DEWDNEY

Le menu du jour : biomorphes sur pavages de Truchet, accompagnés de popcorn multicolores et d'escargots

« Je me considère parfois comme un pêcheur : les programmes informatiques et l'imagination constituent mes lignes, mes hameçons et mes cannes ; les images sont mes trophées de pêche et des mets succulents. »

Clifford PICKOVER

L'auteur de la citation précédente, Clifford Pickover, est un des fleurons du Centre de recherches *IBM* de Yorktown Heights : il y effectue des études extrêmement sérieuses, mais a également créé une série de programmes récréatifs qui constituent son « attirail de pêche ». Ces programmes construisent des motifs chaotiques dont l'esthétique est surprenante. J'ai souvent voulu présenter les plus belles images de C.-Pickover ; je ne résiste plus, et vous propose une initiation à la pêche de trois proies informatiques savoureuses : les biomorphes, les pavages de Truchet et le popcorn fractal. Nous découvrirons en fin d'article les superbes escargots logarithmiques, à trois dimensions, capturés par ce chercheur obstiné et spirituel.

Qu'est-ce qu'un biomorphe ? Le terme est déjà apparu dans cette rubrique : en avril 1988, j'avais décrit les formes pseudo-biologiques créées par un programme de Richard Dawkins, biologiste à l'Université d'Oxford. Quand on exécute ce programme, on choisit un arbre initial, et l'ordinateur en propose une série de variantes ; on sélectionne une de ces variantes, et la procédure se répète ; les motifs qui apparaissent après plusieurs cycles sont étranges : ils ressemblent souvent à des êtres organisés.

C. Pickover a inventé ses biomorphes indépendamment de R. Dawkins, et cependant presque simultanément ; sa méthode conduit à des résultats très différents de ceux de R. Dawkins. Alors que les créatures de R. Dawkins ressemblent à des organismes variés souvent macroscopiques (insectes, vertébrés, etc.), les biomorphes de C. Pickover ressemblent à des microbes. La revue *Omni* a comparé C. Pickover à Antonie van Leeuwenhoek ; ce marchand de drap hollandais fut un pionnier de la microscopie, au XVII[e] siècle.

Les biomorphes de C. Pickover vivent dans le plan complexe, c'est-à-dire dans le domaine où le mathématicien français Benoît Mandelbrot découvrit l'ensemble qui porte aujourd'hui son nom. Pour donner naissance à ces biomorphes, on utilise une version simplifiée de l'algorithme qui crée la délicate géométrie fractale des ensembles de Julia, proches cousins de l'ensemble de Mandelbrot, (voir l'article publié dans cette rubrique en janvier 1988). Le programme qui engendre les biomorphes répète une même séquence de calculs, le résultat obtenu après chaque séquence servant de donnée initiale à la séquence suivante.

En « itérant », c'est-à-dire en répétant la fonction

$z_{n+1} \leftarrow z_n^3 + c,$

ce programme fait notamment apparaître le radiolaire à 12 pointes, en bas à gauche, sur la figure 1.

Cette itération s'effectue très simplement : on choisit d'abord un nombre complexe z_0, on l'élève au cube et l'on ajoute un nombre complexe c ; on obtient ainsi un nombre complexe z_1 que l'on élève au cube et auquel on ajoute à nouveau la constante c afin d'obtenir un nombre z_2. En répétant ces élévations au cube et l'addition de la constante c, on obtient successivement les nombres z_3, z_4...

Les nombres « complexes » sont simplement formés de deux nombres ordinaires : l'un est la partie réelle et l'autre, la partie imaginaire. On peut considérer ces deux composantes comme les coordonnées cartésiennes d'un point d'un plan, appelé plan complexe. On représente généralement les nombres complexes comme des sommes de deux composantes : par exemple, le nombre complexe $3 + 5i$ a une partie réelle égale à 3 et une partie imaginaire égale à 5, le symbole i étant une sorte d'étiquette qui désigne la partie imaginaire. Dans la figure 5, j'ai résumé les règles principales de l'addition, de la multiplication et de l'élévation au cube des nombres complexes.

Pour construire un biomorphe, on considère d'abord un réseau de points dans un rectangle du plan complexe : les coordonnées de chaque point du réseau constituent les partie réelles et imaginaires de diverses valeurs initiales z_0. À chaque point du réseau, on associe d'autre part un pixel, ou élément d'image : selon la valeur des parties réelles ou imaginaires obtenues après les itérations de la fonction, on fait apparaître le point correspondant en noir ou en blanc sur l'écran de l'ordinateur.

Tous les biomorphes de la figure 1 sont nés dans un carré de 20 sur 20, centré à l'origine du plan complexe. En trouverez-vous d'autres aussi intéressants ? Tentez votre chance avec le programme BIOMORPHE, qui exécute l'algorithme de C. Pickover. Voici la version qui pêche le radiolaire à 12 pointes :

```
c ← 0,5 + 0,0i
pour j ← 1 à 100
  pour k ← 1 à 100
    calculer z0
    z ← z0
    pour n ← 1 à 10
      z ← z³ + c
      si |re(z)| ou |im(z)| ou |z| > 10
        alors sortir de la boucle
    si |re(z)| ou |im(z)| < 10
      alors afficher (j,k) en noir
      sinon afficher (j,k) en blanc
```

L'instruction « calculer z_0 » s'effectue en plusieurs étapes. On transforme d'abord chaque couple de coordonnées (j,k) d'un pixel en un nombre complexe :

on divise respectivement la longueur et la largeur, dans la zone observée dans le plan complexe, par le nombre de valeurs prises par j et par k. Les quotients obtenus sont les pas dont on fait varier successivement la partie réelle et la partie imaginaire de z_0.

Le radiolaire à 12 pointes apparaît dans le carré du plan complexe suivant :

de -1,5 à 1,5 pour re(z_0)
de -1,5 à 1,5 pour im(z_0)

Comme on a choisi de faire varier j et k de 1 à 100, on considère les nombres z_0 dont la partie réelle et la partie imaginaire varient par pas de 0,03. Le programme BIOMORPHE doit donc contenir des instructions du type :

re(z_0) $\leftarrow$ -1,5 + 0,03 j
im(z_0) $\leftarrow$ -1,5 + 0,03 k

Autrement dit, pour les 10 000 valeurs successives de z_0, on répète la fonction $z^3 + c$ et on teste à chaque fois son résultat.

Pendant les 10 itérations de la boucle interne, on examine le module de z (représenté par $|z|$), ainsi que les valeurs absolues des parties réelle et imaginaire de z ($|\mathrm{re}(z)|$ et $|\mathrm{im}(z)|$). Le module d'un nombre complexe est la racine carrée de la somme des carrés de ses deux composantes ; la valeur absolue des composantes est leur valeur numérique, dépourvue de signe.

Quand le module de z ou la valeur absolue de l'une de ses composantes est supérieure à 10, le programme sort de la boucle, même si les 10 itérations ne sont pas accomplies, et l'on teste de nouveau les parties réelle et imaginaire (au lieu de comparer le module de z à 10, on compare la somme des carrés des deux composantes à 100 ; on évite ainsi un calcul de racine carrée, et le résultat est le même). Si l'une des composantes de la valeur finale de z est inférieure à 10, on fait apparaître en noir le pixel de coordonnées (j,k) ; sinon on le fait apparaître en blanc.

Sur la plupart des ordinateurs individuels, les points de coordonnées comprises entre 1 et 100 sont calés dans un des coins de l'écran graphique. Pour centrer l'image, on peut modifier l'intervalle de variation de j et de k en adoptant l'intervalle 50-150 au lieu de l'intervalle 0-100.

Je laisse les audacieux achever le programme BIOMORPHE, mais je rappelle que les nombre c, z, z_0, z_1... sont tous des nombres complexes, qui doivent être additionnés ou multipliés selon des lois particulières *(voir la figure 5)*. Pour cette raison, chaque opération portant sur ces nombres correspond à deux lignes d'instructions : l'une calcule la partie réelle, l'autre la partie imaginaire.

Comment obtient-on les autres biomorphes, représentés sur la figure 1 ? On remplace simplement la fonction itérative $z^3 + c$ par une autre fonction de nombres complexes.

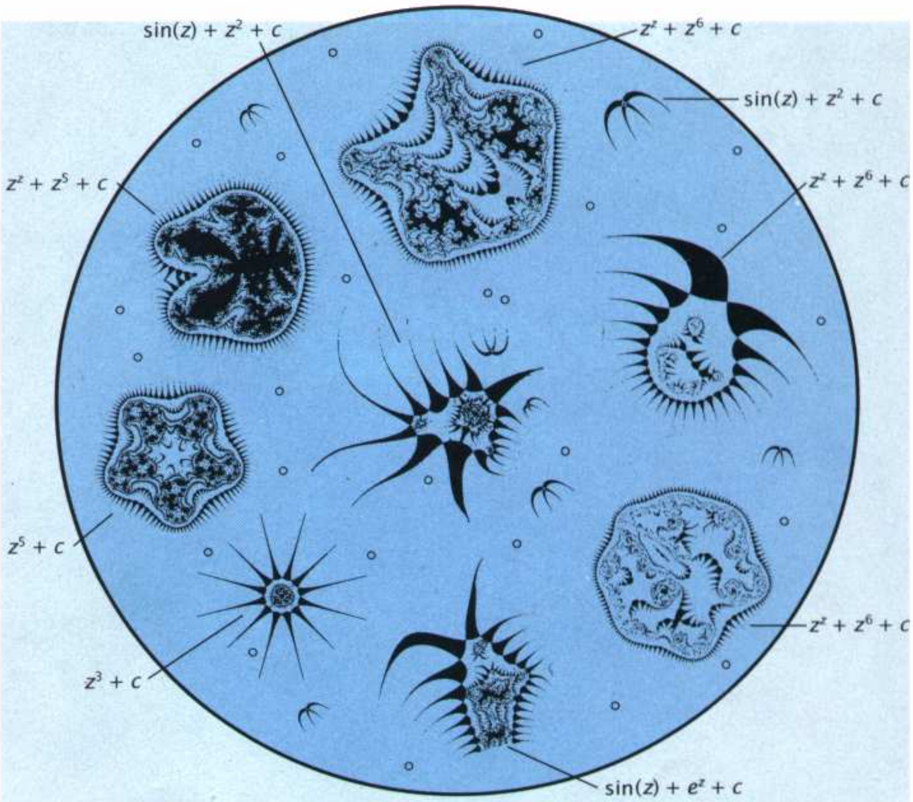
Ceux qui écriront ce programme BIOMORPHE voudront sans doute « pêcher » d'autres individus de la faune qui occupent cette région centrale du plan complexe. La méthode la plus simple consiste à explorer la totalité de cette région, puis d'agrandir un détail d'une des créatures découvertes. Essayez par exemple de changer d'hameçon : toute petite valeur de la constante c peut convenir.

On peut également utiliser, dans la fonction génératrice de biomorphes, de curieuses fonctions de z, comme z^z ou les fonctions trigonométriques de z. C. Pickover a aimablement accepté d'envoyer, à ceux qui en feront la demande, une courte notice sur ces fonctions ; il y explique comment on étudie les diverses morphologies de la figure 1.

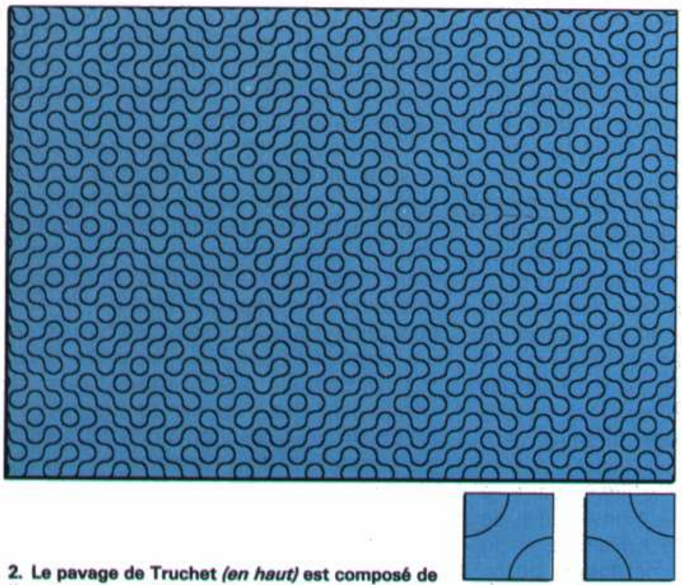
C. Pickover a découvert les biomorphes à la suite d'une erreur dans un programme vérifiant les propriétés fractales de diverses formules ; par mégarde il avait remplacé une fonction ET par une fonction OU dans une instruction qui testait la valeur des parties réelle et imaginaire de z. Cette erreur noircissait indûment de nombreux pixels : c'est ainsi qu'apparurent les « poils » des biomorphes, essentiellement formés par des pixels de ce type.

C. Pickover reconnaît aux biomorphes le droit à une existence autonome : « D'une certaine façon, ces créatures mathématiques existent. Elles résident dans le plan complexe, mais ressemblent aux organismes microscopiques des eaux d'un étang. » Dans quelle mer pourrions-nous découvrir des formes de vie plus évoluées ? C. Pickover nous fait remarquer avec intérêt que la complexité des organismes naturels et artificiels peut résulter d'une répétition de transformations simples.

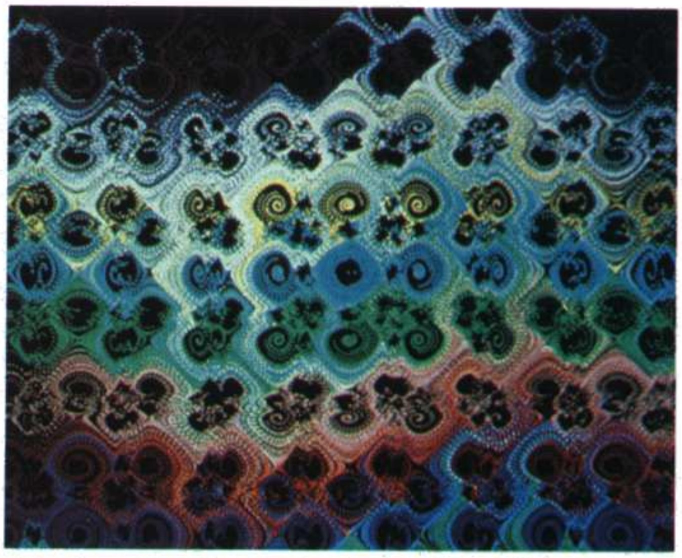
Aujourd'hui C. Pickover recherche de nouvelles méthodes révélant instantanément la signification de données complexes. Dans une page pleine de 0 et de 1, qui illustrent des données informatiques, on discerne très difficilement une régularité ; on observe plutôt une répartition aléatoire. C. Pickover fait ressortir le caractère aléatoire des données à l'aide d'une méthode graphique simple, fondée sur les pavages de Truchet (Sébastien Truchet était un moine français, féru de mathématiques qui vivait au XVIIIe siècle). C. Pickover a modifié le motif original de Truchet ; il l'a remplacé par un



1. Vue au microscope de quelques biomorphes, avec la fonction qui les a créés.



2. Le pavage de Truchet *(en haut)* est composé de l'assemblage de deux dalles de base *(à droite)*.



3. On crée ce popcorn fractal en cherchant les points solution successifs d'un système de deux équations.

carré comportant deux quarts de cercle centrés sur des sommets opposés *(voir la figure 2, en bas)* ; ce motif n'a que deux orientations possibles.

Quand on recouvre une surface plane par les pavages de Truchet, on voit apparaître d'étranges courbes sinueuses. Elles ne comportent aucune discontinuité, sauf aux bords ; partout ailleurs, les quarts de cercle se raccordent au milieu des côtés des carrés.

En faisant correspondre à chaque chiffre binaire un pavé de Truchet, orienté dans un sens ou dans l'autre selon que le chiffre est 0 ou 1, on peut transformer une grille remplie de 0 et de 1 en un pavage de Truchet. C. Pickover affirme que si les données binaires sont aléatoires, les courbes ondulent et s'emboîtent de façon confuse, sans que la moindre régularité n'apparaisse.

4. Cette coquille d'escargot est un assemblage de sphères centrées sur une spirale logarithmique.

En revanche, quand les données présentent une certaine régularité, on aperçoit aussitôt des motifs qui dessinent systématiquement des courbes structurées. Dans le pavage de Truchet correspondant à un tableau de chiffres où chaque 0 a un peu plus de chances d'être suivi d'un autre 0 que d'un 1, et où chaque 1 a un peu plus de chances d'être suivi d'un 1 que d'un 0, on distingue nettement une direction privilégiée suivant une diagonale (je vous laisse deviner pourquoi).

Personnellement je préfère les pavages qui correspondent à des grilles binaires aléatoires, comme celle de la figure 2, car elles suggèrent une quantité de jeux et de casse-tête. Forment-elles des labyrinthes, par exemple ? Essayez de trouver un chemin entre le bord inférieur et le bord supérieur, ou entre les bords droit et gauche. En chemin, on rencontre souvent des « îlots », c'est-à-dire des courbes fermées sur elles-mêmes. Toute courbe qui n'atteint pas un bord se referme tôt ou tard. Certaines d'entre elles sont de petits cercles ; d'autres ont la forme d'une haltère... Peut-on classer les divers types de courbes fermées ? Quel est le nombre moyen de chaque type dans un pavage aléatoire ?

Il n'est pas difficile d'écrire un programme qui transforme un tableau de chiffres binaires en un pavage de Truchet. Avec deux boucles emboîtées, on explore le contenu du tableau, élément par élément, et l'on fait dessiner sur l'écran le motif correspondant à chaque chiffre. L'effort informatique est minime, de sorte que nous pouvons sans tarder découvrir maintenant une nouvelle friandise graphique de C. Pickover : le popcorn fractal.

La figure 3 est un exemple très frappant de ce « popcorn ». On l'obtient en calculant des solutions d'un système de deux équations différentielles itérées. On calcule l'abscisse x d'un point solution en retranchant une fonction de l'ordonnée y à l'abscisse x du point précédent ; on procède de la même façon pour les ordonnées y. Un tel système d'équation est un système cyclique ; quand les équations comportent des fonctions trigonométriques, on obtient souvent des images spectaculaires.

Dans le programme POPCORN, on calcule les données résultant du système d'équation suivant :

$$x_{n+1} = x_n - h\sin(y_n + \tan(3y_n))$$
$$y_{n+1} = y_n - h\sin(x_n + \tan(3x_n))$$

La fonction sinus est multipliée par un petit coefficient h, afin que chaque nouvelle valeur de x ou de y ne s'écarte pas trop de la précédente, quel que soit le nombre des itérations effectuées, et que le graphisme reste confiné à un petit secteur (dans le programme de C. Pickover, $h = 0{,}05$).

Le programme POPCORN exécute 50 itérations successives pour chacun des 2500 couples de valeurs initiales (x_0, y_0) ; il affiche un point sur l'écran après chaque itération. Son algorithme est le suivant :

```
pour j ← 1 à 50
  pour k ← 1 à 50
    x0 ← - 6 + 0,24 j
    y0 ← - 6 + 0,24 k
      x ← x0
      y0 ← y0
        pour n ← 1 à 50
          xx ← x - hsin (y + tan (3y))
          yy ← y - hsin (x + tan (3x))
          x ← xx
          y ← yy
          calculer jp et kp
          afficher (jp, kp)
```

Les variables xx et yy permettent de conserver temporairement les valeurs de x et y des cycles d'itérations précédents. Les couples de valeurs initiales (x_0, y_0) correspondent aux points d'une grille carrée de 12 par 12 unités, centrée à l'origine d'un plan repéré par des coordonnées (x,y). Les valeurs initiales de x et de y sont donc toujours comprises entre -6 et $+6$. Comme dans le programme BIOMORPHE, on calcule les valeurs initiales à l'aide de deux boucles emboîtées. Dans ce programme POPCORN, les indices des deux boucles varient de 1 à 50.

La boucle des itérations du système d'équations se termine par l'affichage sur l'écran du point de coordonnées (jp,kp), calculé à partir de chaque point initial (x_0, y_0), on calcule jp et kp à partir de x et y :

$$jp \leftarrow 4{,}166x + 25$$
$$kp \leftarrow 4{,}166y + 25$$

Le popcorn fractal de C. Pickover est donc formé des points calculés par des itérations. On peut agrandir à volonté certaines régions du dessin afin d'y découvrir des détails pittoresques et inattendus ; on peut aussi, comme le fait C. Pickover, colorier le popcorn en modifiant la couleur du point affiché à chaque fin d'itération.

Les créations graphiques de C. Pickover ont souvent été présentées au public : elles ont été décrites dans diverses revues techniques et ont figuré dans des expositions en Suisse, au Japon et au Musée de l'informatique de Boston.

Je termine cette présentation rapide de son œuvre en vous invitant à admirer l'une de ses dernières créations graphiques : une magnifique coquille d'escargot *(voir la figure 4)*. Cette image est construite au moyen d'une famille de sphères dont les centres se disposent sur une spirale logarithmique. Par la technique de « tracé de rayons », C. Pickover a reproduit les reflets de la lumière sur la coquille.

Pour obtenir les principales règles de la manipulation des nombres complexes et recevoir une bibliographie des publications de C. Pickover, vous pouvez écrire à *IBM* Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, N.Y. 10598, États-Unis.

Pour additionner deux nombres complexes, on additionne séparément les parties réelles et les parties imaginaires : la somme des deux nombres complexes $a+bi$ et $c+di$ est le nombre complexe $(a+c) + (b+d)i$.

Le produit des deux nombres complexes précédents est un peu plus compliqué : il est égal à $(ac-bd) + (ad+bd)i$ (on le calcule en effectuant normalement le produit des termes et en tenant compte de l'égalité $i \times i = -1$). De cette formule, on déduit celle qui donne le carré de $a+bi$: $(a^2-b^2) + 2abi$. La partie réelle du carré est donc (a^2-b^2), et sa partie imaginaire $2ab$.

En appliquant à nouveau la formule de la multiplication, on peut calculer le cube de $a+bi$: la partie réelle de $(a+bi)^3$ est $a(a^2-3b^2)$, et la partie imaginaire est $b(3a^2-b^2)$.

5. Quelques opérations avec des nombres complexes.